Modelos matemáticos teóricos para la producción mundial de petróleo.

Por Bernardo Robles Marín

Licenciado en Ciencias Matemáticas

1. La curva logística.

En 1956, el geólogo de la compañía Shell Marion King Hubbert hizo público su modelo matemático en el que predecía el cenit de la producción de petróleo de EEUU. Su método se basó en la observación de que la función logística es la curva que mejor describe la producción acumulada de uno o de la suma de varios campos petrolíferos, siempre que la explotación se produzca sin restricciones económicas o políticas y suponiendo que no se sigue un plan que incluya restricciones para su conservación.

Desde su descubrimiento por Verhulst en 1844, esta curva ha sido objeto de múltiples aplicaciones, tanto en el campo de la demografía, la teoría del aprendizaje, la explotación de cualquier clase de recurso finito, etc. Las razones por las que esta curva modeliza tan variados aspectos son apreciables en la ecuación diferencial de donde procede:

$$\frac{dP}{dt} = aP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{L}\right) \quad \text{(I)}$$

Donde *a* es el ritmo de extracción, P es la producción acumulada en el tiempo y L es la cantidad total del recurso. De esta expresión podemos deducir las dos importantes propiedades:

P1.- El ritmo de extracción del recurso es proporcional a la cantidad ya extraída.

Esto es común en todos los procesos de crecimiento exponencial, y para el caso del petróleo, está ocasionada por el hecho de que la demanda del recurso crece en fracción continuada de los usos que se hacen de las cantidades extraídas anteriormente, es decir, por el crecimiento económico, más que por la ingeniería misma del campo petrolífero.

P2.- El ritmo de extracción es proporcional a la fracción del recurso disponible.

Conforme avanza el tiempo, los crecimientos compuestos del principio entran en competencia unos con otros por la existencia de límites, y sustraen del crecimiento que se produciría sin límites una fracción equivalente a la restante del recurso. Al admitir esta propiedad, se supone que la fracción del recurso producido acumulado respecto del total recuperable, es decir $P(t)/L$, representa aproximadamente la fracción que de alguna forma se "inutiliza", para el crecimiento exponencial. Suponer que en un modelo de crecimiento limitado las unidades que se van eliminando son esta cantidad precisa y no otra es quizás un punto débil de esta teoría y posiblemente otros planteamientos podrían llevar a soluciones igualmente útiles.

Para ilustrar cómo funciona la evolución de la función logística, proponemos el siguiente ejemplo. Imaginemos un tubo de ensayo donde se introduce una cantidad determinada de líquido orgánico, que será el alimento de unas bacterias. Introducimos en el momento inicial una única bacteria, que se reproduce cada minuto duplicándose si tiene suficiente alimento alrededor. Al principio, nada entorpece una evolución típicamente exponencial, dando en los siguientes minutos un crecimiento en la población de 2, 4, 8, 16, etc. Sin embargo, llegado un determinado momento, se producirán aglomeraciones de bacterias de forma que las que se encuentren en una peor disposición, por estar comprimidas por otras, no tendrán las condiciones para poder reproducirse al no estar en contacto con el alimento necesario. Aquellas que sigan en buena posición seguirán duplicándose sin problemas. Por tanto el crecimiento dejará de ser exponencial y la siguiente generación no se duplicará, sino que se multiplicará por $2(1-\alpha)$, donde aquí α representa la fracción de bacterias que no se han podido reproducir. Que esta fracción α sea $\frac{P(t)}{L}$ es una hipótesis razonable suponiendo una distribución aleatoria de las bacterias. Según esta hipótesis, si se ha alcanzado la mitad del número máximo de bacterias que se pueden alcanzar, y por tanto queda la mitad de alimento que al principio, entonces aproximadamente la mitad de ellas no puede reproducirse. Estadísticamente este hecho parece cuadrar siempre que no se den estructuras ordenadas (baja entropía) de crecimiento. No parece sin embargo que haya ninguna razón general para suponer que estas dos fracciones no puedan ser distintas, dando lugar a ejemplos por un lado exponenciales (podría ser moviendo el líquido, de forma que todas tengan siempre el mismo alimento), o bien de crecimiento inferior, si se producen tapones que hagan que solamente las bacterias de la frontera puedan reproducirse. Para el petróleo, la competencia por el recurso se dará cuando las expectativas de nuevos usos del petróleo que genera incesantemente el crecimiento económico continuado no puedan ser satisfechas, probablemente por mecanismos de mercado. Estas serán las bacterias encerradas incapaces de reproducirse. En otras palabras, se trata de la llamada destrucción de la demanda y la expulsión del mercado de los países más vulnerables.

La solución de esta ecuación diferencial, como sabemos es la función dada por

$$P(t) = \frac{L \cdot e^{ax}}{1 + e^{ax}} \qquad \text{(II)}$$

2. La curva logística modificada.

Sin embargo, existen aspectos en la aplicación al ejemplo de la producción de petróleo que la función logística parece no contemplar. El descenso del crecimiento del ritmo de la extracción viene determinado por la cantidad restante, es decir, por los límites existentes como recurso finito, y no se contempla el hecho de que las últimas fracciones son más difíciles de extraer que las iniciales.

Volvamos por un momento al ejemplo de las bacterias. Podemos imaginar que como resultado del metabolismo, los productos de desecho al mezclarse con el líquido ocasionarán que este sea cada vez más menos nutritivo, lo que probablemente repercutirá en que el metabolismo se ralentice y se amplíe el tiempo en el que una bacteria se duplica, por ejemplo, pasando de un minuto a un minuto y medio. Este efecto incide directamente sobre la tasa de crecimiento y es independiente de la competencia por los recursos. En el caso de la explotación del petróleo, corresponde a las profundidades crecientes en los yacimientos, las pérdidas de presión y la pérdida de calidad del crudo, así como el comienzo de la explotación de fuentes no convencionales. La tasa en la que se reduce el ritmo de reproducción es evidentemente una función de la fracción $\frac{P(t)}{L}$. Es posible buscar la expresión concreta que encaje de la mejor forma en cada caso particular de aplicación de este modelo cuasi logístico. Sin embargo, creo que la familia de funciones de la forma $\left(1-\frac{P(t)}{L}\right)^{\beta}$, con parámetro $\beta > 0$ (que sería necesario ajustar), es adecuada para describir el comportamiento en la mayor parte de los casos. En el ejemplo de las bacterias, suponiendo $\beta = \frac{1}{2}$ (sin ninguna base, solamente para ilustrar), nos daría que la duplicación del principio va derivando al trascurrir el tiempo según la expresión $2\sqrt{1-\frac{P(t)}{L}}$, y cuando se ha consumido la mitad del alimento en lugar de duplicarse en un minuto lo hacen en $\frac{2}{2\sqrt{1-\frac{1}{2}}} = 1,41$ minutos.

Así pues, se propone una modificación de las ecuaciones iniciales que incorpore este planteamiento, lo cual está justificado para la explotación petrolífera por la experiencia. La explotación de las arenas asfálticas de Alberta, o los yacimientos pre-sal de la costa brasileña son un claro ejemplo de que las últimas fracciones en ser explotadas requieren de un mayor desarrollo, tiempo de exploración, consumo de energía, para los cual es necesario el uso de materiales y tiempo. Todo esto ralentiza globalmente el ritmo de explotación y, paradójicamente, hace que el recurso, al ser explotado más lentamente, esté disponible durante más tiempo con un menor volumen.

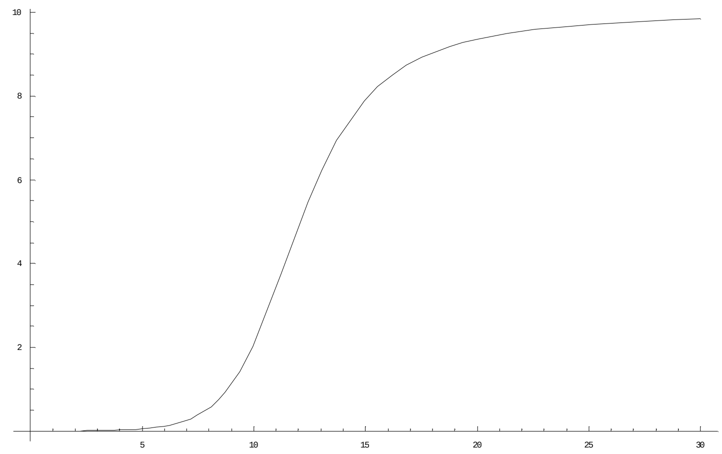
Resumiendo, la tasa de extracción del recurso $\frac{dP}{dt}$, inicialmente constante y que representaremos con la letra “a”, para una cantidad total recuperable L será

1. Proporcional a la cantidad total extraída hasta ese momento, P(t).
2. Proporcional a la cantidad de recurso disponible, $1-\frac{P(t)}{L}$.
3. Proporcional al factor de pérdida de calidad del recurso $\left(1-\frac{P(t)}{L}\right)^{\beta}$. (III)

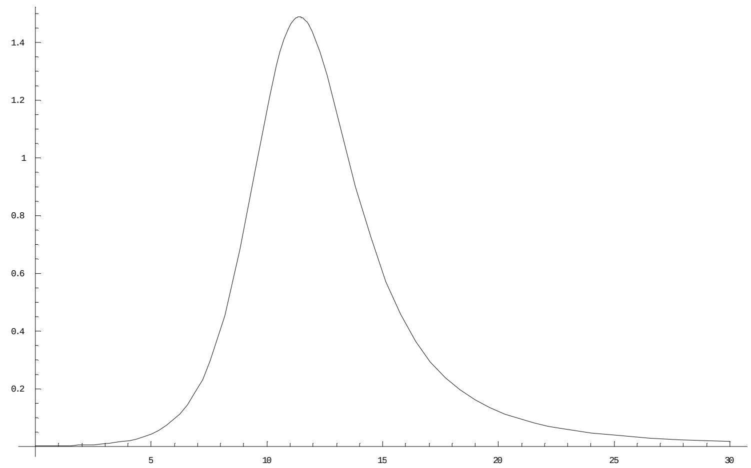
Por tanto, la ecuación diferencial quedará como

$$\frac{dP}{dt} = aP(t)\left(1-\frac{P(t)}{L}\right)\left(1-\frac{P(t)}{L}\right)^{\beta}, \text{ o bien } \boxed{\frac{dP}{dt} = aP(t)\left(1-\frac{P(t)}{L}\right)^{1+\beta}, \text{ con } \beta>0} \quad \text{(IV)}$$

La solución de esta ecuación no es difícil de hallar, a pesar de que no existe una expresión explícita de ella, como sí ocurre con la función logística. Sin embargo, podemos hallar su gráfica, que tendría el siguiente aspecto ($L = 10;\ a = 0.8;\ \beta = 1/2$)



La función derivada P'(t) que correspondería con la producción anual de petróleo (la curva de Hubbert) sería asimétrica, como cabe esperar, con una mayor cantidad de recurso en el lado derecho del máximo.

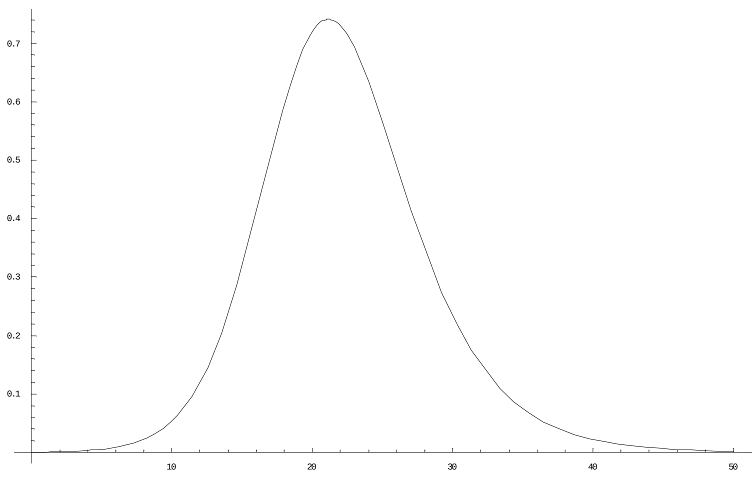


3. La curva logística generalizada y la ecuación de Gompertz.

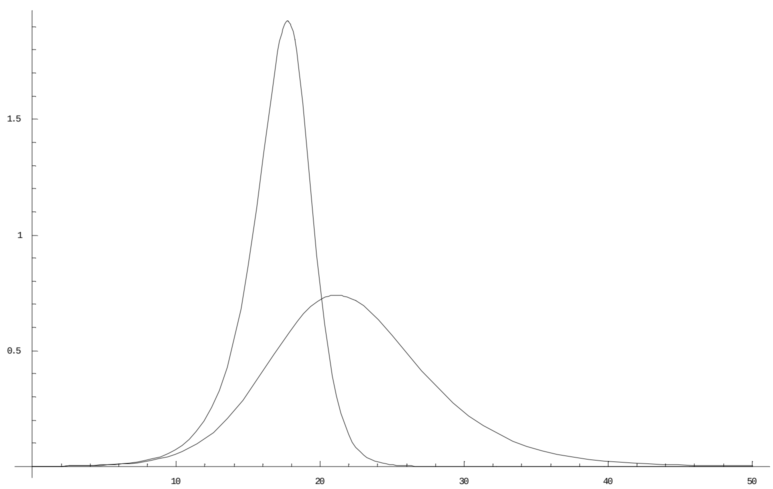
Además de la solución propuesta en el apartado anterior, existen otras posibles modificaciones de la ecuación diferencial (I) que pueden describir el efecto tanto del agotamiento como de pérdida de calidad del recurso. La primera de ellas es la curva logística generalizada, que es la solución de la ecuación diferencial,

$$\frac{dP}{dt} = aP(t)\left(1 - \left(\frac{P(t)}{L}\right)^{\alpha}\right) \quad \text{(V)}$$

dependiente del parámetro $\alpha > 0$. Esta ecuación indica que en cada momento la fracción de recurso que no produce crecimiento es $\left(\frac{P(t)}{L}\right)^{\alpha}$, lo que la hace mayor a $\frac{P(t)}{L}$ si $\alpha < 1$ y menor si $\alpha > 1$. En el primer caso el crecimiento se ralentiza considerablemente dando como resultado una curva de producción de forma muy parecida a la anterior.



En el segundo caso, $\alpha > 1$, los recursos son explotados a ritmo considerable hasta su práctico agotamiento. Veamos las diferencias superponiendo ambos gráficos:

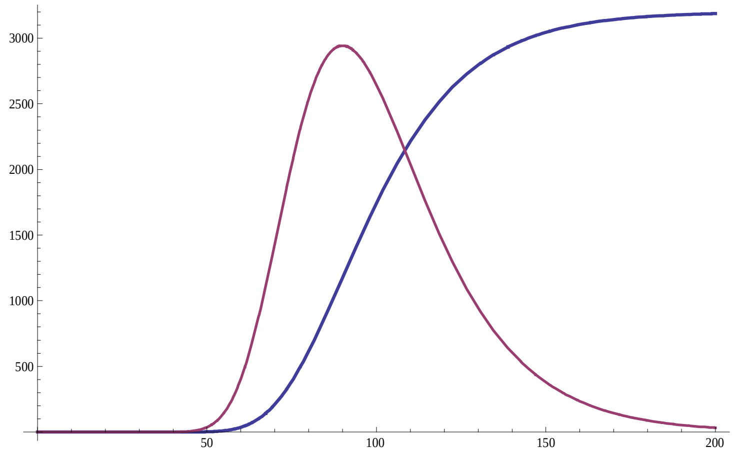


Las diferencias en cuanto al comportamiento y la forma de la logística generalizada con respecto a la primera ecuación (IV) que se propone en el presente trabajo es escasa. Por una parte, una ventaja de la primera es que se distingue qué factor y en qué medida disminuye el ritmo de explotación tanto por competencia de recursos como por pérdida de calidad. No ocurre esto en la logística generalizada, puesto que no se distinguen ambos efectos por separado. En apoyo a la última, ha descrito de forma satisfactoria el crecimiento tumoral, una imagen que parece corresponderse bastante bien con el devenir de la especie humana sobre la tierra, aunque es posible que también la evolución de un tumor también pueda ser descrita adecuadamente por la primera.

Por otra parte existen otras ecuaciones cuyas soluciones son funciones sigmoideas que también merecería la pena explorar, como la ecuación de Gompertz dada por

$$P'(t) = a\log\left(\frac{L}{P(t)}\right)P(t), \text{ con solucion } \mathrm{P(t)}=\mathrm{a}e^{b\cdot e^{ct}}, \quad \text{(VI)}$$

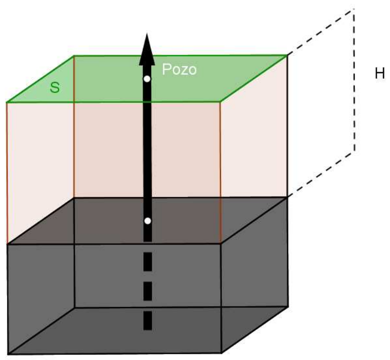
donde b y c son números negativos. Esta es el caso límite de la logística generalizada y parece que también describe perfectamente el crecimiento tumoral. La gráfica de la función de Gompertz y su derivada son estas:



Para no hacer excesivamente extenso este ensayo, analizaremos las consecuencias de la aplicación de la ecuación (IV) al modelo de producción global de petróleo, intentando extraer alguna información interesante.

4. Un mundo imaginario.

Procediendo al modo matemático, que suele simplificar la realidad para poder aproximarla con modelos algebraicos exactos, supondremos que toda la producción mundial de petróleo se extrae de un único pozo prismático como el de la figura.



Trataremos en primer lugar de encontrar el parámetro $\beta > 0$ de la ecuación (IV). Admitiendo la simplificación anterior $P(t) = S \cdot H(t)$, donde S sería constante. Bombear un caudal Q está relacionado con la altura H a la que se desea elevar según la llamada curva motriz, en la forma $H = A - BQ^2$. De esta expresión se deduce que el caudal de bombeo Q es proporcional a una expresión del tipo $\sqrt{A-H}$. Este caudal Q corresponde en nuestro caso con la producción instantánea $\frac{dP}{dt}$ o *P'(t)*. Dado que según hemos visto en el párrafo anterior, vamos a suponer que la producción acumulada P(t) es proporcional a la altura del yacimiento H(t), podemos deducir que *P`(t)* es proporcional a una expresión del tipo $\sqrt{A-\frac{P(t)}{K}}=\left(A-\frac{P(t)}{K}\right)^{\frac{1}{2}}$. Este parece ser el factor que gobierna el descenso en la tasa de crecimiento debido al aumento de energía necesaria para el bombeo según avanza la producción acumulada, y como se ve tiene la misma forma que el propuesto $\left(1-\frac{P(t)}{L}\right)^{\beta}$. Por estas razones nos inclinamos a pensar que $\beta = 1/2$ es un valor apropiado, quedando la ecuación diferencial de la siguiente forma:

$$\frac{dP}{dt}=aP(t)\left(1-\frac{P(t)}{L}\right)^{\frac{3}{2}} \qquad \text{(VII)}$$

5. Tasa de rendimiento energético (TRE) y la curva neta.

La energía mínima necesaria para elevar una masa M a una altura H viene dada por la expresión de la energía potencial $E = MgH$. Si tenemos una producción instantánea *P'(t)*, teniendo en cuenta que $H(t)=P(t)/S\cdot$, esta energía será $E=\frac{g}{S}P'(t)P(t)$. Estas sencillas observaciones nos sirven para darnos cuenta de que la energía necesaria para la extracción de petróleo E debe ser aproximadamente proporcional al producto $P'(t)P(t)$, siendo la constante de proporcionalidad, que llamaremos k, desconocida en principio. Además, siempre será necesaria una cantidad inicial para la construcción de infraestructuras, perforación, etc., antes de de proceder a la explotación, que también será proporcional a P'(t). Por esto, creemos que la expresión

$$E(t)=P'(t)\left(c+kP(t)\right)$$

se ajusta bien para modelar la energía empleada en la obtención de petróleo en función del tiempo.

De aquí se puede derivar con facilidad una expresión para una función que describa la evolución de la TRE (Tasa de Rendimiento Energético) o EROEI.

$$TRE(t)=\frac{P'(t)}{P'(t)\left(c+kP(t)\right)}=\frac{1}{c+kP(t)}$$

Para valores de t muy avanzados, $TRE(t)$ tiende hacia 1, por tanto $\lim_{t\to\infty}TRE(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{c+kP(t)}=\frac{1}{c+kL}=1$, de donde $c+kL=1$.

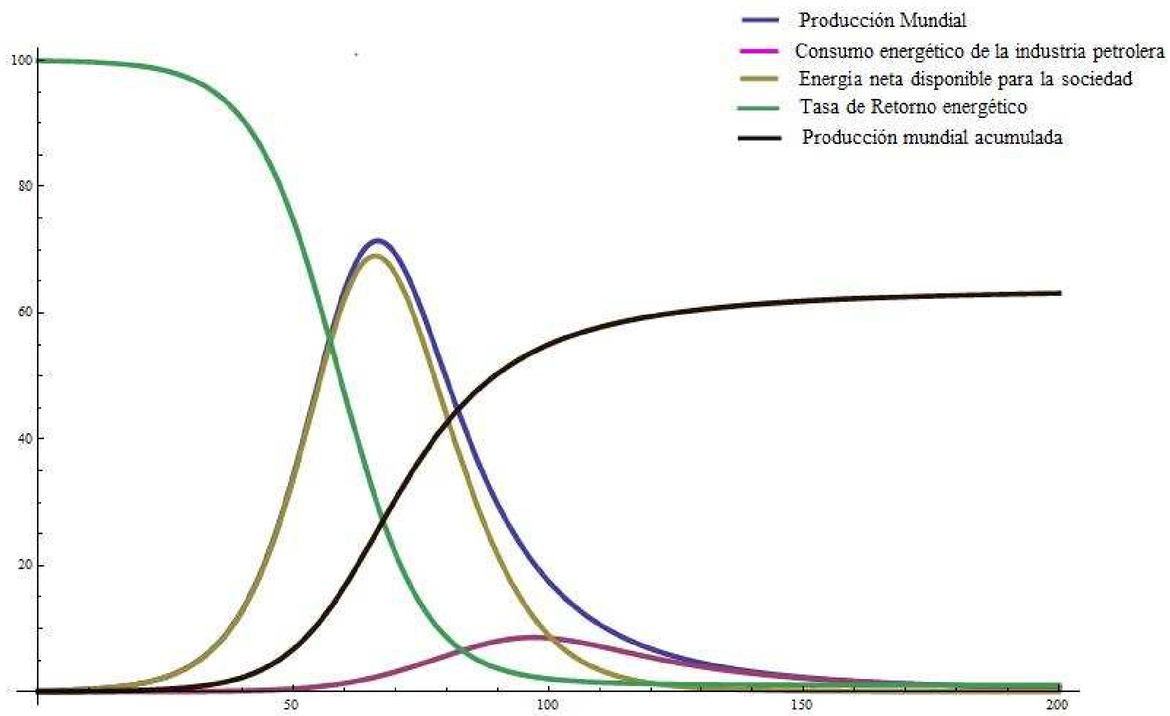
El parámetro c nos permitirá ajustar mejor esta curva a los datos reales.

La curva neta , es decir, la curva de producción menos la curva de evolución del consumo energético de la propia extracción a la que llamaremos $N(t)$, tendrá una expresión en la forma:

$$N(t) = P'(t) - E(t) = P'(t) - P'(t)(c + kP(t)) = P'(t)\left(1 - c - kP(t)\right)$$

Tras estas consideraciones, unas curvas que podrían modelar la evolución de los parámetros fundamentales respecto del petróleo podrían ser las que se muestran más abajo, teniendo en cuenta que no se han ajustado los parámetros para poder describir ningún proceso real y su trazado tiene intención meramente ilustrativa.

Si la forma de estas curvas, que se corresponden con un mundo imaginario súper-simplificado, son o no útiles y puede ser un conveniente tratar de ajustar los datos reales para poder obtener conclusiones, es una cuestión que personas más familiarizadas con el estudio de los recursos energéticos podrían responder. De momento se presenta este ejercicio matemático que no tiene más pretensiones que la de satisfacer una curiosidad personal.



Bernardo Robles Marín

Caravaca de la Cruz, 25 de junio de 2010